ANALIZA FUNKCJONALNA
LISTA 6

1. Wykazać, że w nierówności Schwarza równość zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy wektory x, y, które się w niej pojawią są liniowo zależne.

2. Załóżmy, że przestrzeń Hilberta H jest *algebraiczną sumą prostą* podprzestrzeni liniowych H_1 oraz H_2. Mówimy, że H jest *sumą prostą przestrzeni Hilberta* H_1 oraz H_2 jeżeli iloczyn skalarny na H spełnia warunek

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle + \langle y_1, y_2 \rangle$$

gdzie $(x_1, y_1) = x_1 + y_1$, $(x_2, y_2) = x_2 + y_2$ dla $x_1, x_2 \in H_1$, $y_1, y_2 \in H_2$, co oznaczamy $H = H_1 \oplus H_2$. Pokazać, że dla każdej popdrzestrzeni domkniętej M zachodzi wzór $H = M \oplus M^\perp$.

3. Niech $H = M \oplus M^\perp$ będzie rozkładem na sumę prostą z poprzedniego zadania. Uzasadnić, że jeżeli P_M oraz $P_{M^\perp}$ sę operatorami rzutów ortogonalnych na M oraz $M^\perp$, to $\mathrm{Ker} P_M = M^\perp$ oraz $\mathrm{Ker} P_{M^\perp} = M$.

4. Pokazać na przykładzie przestrzeni Hilberta $H = l^2$ i jej podprzestrzeni $M = c_{00}$, która nie jest domknięta, że istnieją w H wektory, które nie posiadają jednoznacznego rozkładu w postaci sumy wektora z M i wektora do niego ortogonalnego Wsk: można wybrać np. wektor

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n}{n}$$

i zbadać jego rozkłady.

5. Pokazać, że każdy zbiór ortogonalny jest liniowo niezależny.

6. Korzystając z zupełności zbioru zespolonych funkcji trygonometrycznych w zespolnej przestrzeni $L^2[0, 2\pi]$, uzasadnić zupełność zbioru rzeczywistych funkcji trygonometrycznych w rzeczywistej przestrzeni $L^2[0, 2\pi]$ (zadania 16-17, lista 4).

7. Rozwinąć w rzeczywisty szereg trygonometryczny Fouriera (rozwinięcie w szereg względem bazy ortonormalnej złożonej z rzeczywistych funkcji trygonometrycznych, którego współczynnikami są współczynniki Fouriera) funkcję $f(x) = x$ jako funkcję z $L^2[-\pi, \pi]$ (zastosować tę samą bazę co w zadaniu 17 z listy 4). Następnie wyprowadzić wzór na

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

przy użyciu tożsamości Parsevala.

8. Niech $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie bazą ortonormalną w przestrzeni Hilberta H. Pokazać, że operatory zadane wzorami

$$\begin{aligned} T_1(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_{n+1} \\ T_2(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_{n+1} \rangle e_n \end{aligned}$$

są dobrze zdefiniowanymi operatorami liniowymi na H i że są one ograniczone.

9. Niech $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie bazą ortonormalną w przestrzeni Hilberta H i niech $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ograniczonym ciągiem liczb zespolonych. Pokazać, że

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n$$

jest dobrze zdefiniowanym operatorem liniowym na H i że jest on ograniczony z normą $\| T \| = \sup_n |\lambda_n|$.

R. Lenczewski